

Zadanie 1.

Dana jest dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej ciągłej X .

Wyznaczyć gęstość $f(x)$, wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa różni się od wartości oczekiwanej o mniej niż odchylenie standardowe. Wyznacz x_0 aby $P(X > x_0) = 0,25$.

Narysować wykresy funkcji $F(x), f(x)$.

$$1.1 \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x-2}, & x \leq 2; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{2-x}, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.2 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.3 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{4}; \\ \frac{1}{2}(1 + \sin 2x), & -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$1.4 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$1.5 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.6 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 1 - \frac{8}{x^3}, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.7 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$1.8 \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{5x}, & x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.9 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{9}x^2, & 0 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.10 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.11 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.12 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,25x^2, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.13 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

$$1.14 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin x, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.15 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x(2-x), & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.16 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2}(x+1)^2, & -1 < x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.17 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x), & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$1.18 \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{3x}, & x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.19 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3; \\ (x-3)^2, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$1.20 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2, & 0 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.21 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{12}; \\ \frac{1}{2}(1 + \sin 6x), & -\frac{\pi}{12} < x \leq \frac{\pi}{12}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

$$1.22 \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{x-3}, & x \leq 3; \\ 1 - \frac{2}{3}e^{3-x}, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.23 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -0,5; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin 2x, & -0,5 < x \leq 0,5; \\ 1, & x > 0,5. \end{cases}$$

$$1.24 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 1 - (x-2)^2, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.25 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{2}(x+1), & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.26 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.27 \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}, & x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.28 \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x, -\infty < x < \infty.$$

$$1.29 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.30 \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{x}{3}}, & x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{3}}, & x > 0. \end{cases}$$

Zadanie 2.

Rozkład dyskretnej zmiennej losowej (X, Y) określony jest funkcją prawdopodobieństwa zapisaną w tablicy.

Oblicz współczynnik korelacji i prawdopodobieństwo, że zmienna (X, Y) ma wartości w obszarze D . Wyznacz macierz kowariancji i macierz korelacji.

Wyznacz i narysuj (zaznacz wartości funkcji prawdopodobieństwa) prostą regresji liniowej zmiennej losowej Y względem zmiennej losowej X .

Skomentuj otrzymane wyniki.

2.1

Y	X			
	1	2	3	4
-2	0,03	0,02	0,06	0,04
0	0,03	0,10	0,10	0,09
2	0,05	0,08	0,20	0,20

$$D = \{-\infty < x < \infty; -1 \leq y \leq 3\}$$

2.2

Y	X			
	-2	-1	0	1
-1	0,02	0,05	0,04	0,10
0	0,03	0,08	0,05	0,20
2	0,02	0,05	0,06	0,30

$$D = \{-1 < x < 0; 0 \leq y \leq 2\}$$

2.3

Y	X			
	-2	0	2	4
1	0,03	0,03	0,05	0,15
3	0,04	0,07	0,20	0,08
5	0,02	0,10	0,03	0,20

$$D = \{-1 \leq x \leq 3; 2 \leq y \leq 6\}$$

2.4

Y	X			
	0	2	4	6
0	0,05	0,03	0,06	0,05
2	0,07	0,10	0,20	0,06
4	0,08	0,07	0,09	0,14

$$D = \{0 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 4\}$$

2.5

Y	X			
	-2	-1	0	1
1	0,02	0,04	0,02	0,04
2	0,08	0,05	0,07	0,20
3	0,03	0,10	0,20	0,15

$$D = \{-1 \leq x \leq 2; 2 \leq y \leq 3\}$$

2.6

Y	X			
	0	2	4	6
1	0,02	0,05	0,15	0,10
2	0,10	0,08	0,10	0,06
3	0,05	0,04	0,20	0,05

$$D = \{0 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 2\}$$

2.7

Y	X			
	0	1	2	3
2	0,04	0,04	0,06	0,07
4	0,03	0,08	0,09	0,10
6	0,05	0,09	0,15	0,20

$$D = \{-\infty < x < \infty; 3 \leq y \leq 5\}$$

2.8

Y	X			
	-2	0	2	4
-1	0,03	0,04	0,06	0,08
0	0,05	0,06	0,09	0,10
2	0,06	0,08	0,15	0,20

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

2.9

Y	X			
	0	2	4	6
0	0,08	0,10	0,06	0,03
1	0,10	0,15	0,09	0,05
2	0,09	0,12	0,07	0,06

$$D = \{-1 \leq x \leq 4; 2 \leq y \leq 3\}$$

2.10

Y	X			
	-1	1	3	5
-1	0,04	0,10	0,09	0,07
0	0,05	0,08	0,10	0,06
2	0,06	0,09	0,20	0,06

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$$

2.11

Y	X			
	0	1	2	3
0	0,04	0,09	0,20	0,06
2	0,04	0,08	0,10	0,08
4	0,05	0,07	0,10	0,09

$$D = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

2.12

Y	X			
	1	2	3	4
-1	0,02	0,03	0,05	0,05
1	0,04	0,09	0,10	0,09
3	0,06	0,07	0,20	0,20

$$D = \{-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq 4\}$$

2.13

Y	X			
	-1	0	1	2
1	0,03	0,03	0,05	0,06
3	0,04	0,09	0,10	0,12
5	0,05	0,08	0,15	0,20

$$D = \{-\infty < x < \infty; 2 \leq y \leq 4\}$$

2.14

Y	X			
	-1	0	1	2
0	0,01	0,04	0,03	0,10
1	0,04	0,09	0,06	0,20
3	0,02	0,05	0,06	0,30

$$D = \{0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 3\}$$

2.15

Y	X			
	-1	1	3	5
0	0,02	0,01	0,04	0,15
2	0,05	0,08	0,20	0,10
4	0,02	0,10	0,03	0,20

$$D = \{0 \leq x \leq 4; 1 \leq y \leq 5\}$$

2.16

Y	X			
	-2	0	2	4
2	0,04	0,02	0,05	0,04
4	0,08	0,10	0,20	0,06
6	0,08	0,08	0,10	0,15

$$D = \{-1 \leq x \leq 3; 2 \leq y \leq 5\}$$

2.17

Y	X			
	-1	0	1	2
2	0,01	0,03	0,01	0,03
3	0,09	0,06	0,08	0,20
4	0,04	0,10	0,20	0,15

$$D = \{0 \leq x \leq 3; 3 \leq y \leq 4\}$$

2.18

Y	X			
	-1	1	3	5
1	0,01	0,04	0,15	0,10
2	0,10	0,09	0,10	0,05
3	0,06	0,04	0,20	0,06

$$D = \{-1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$$

2.19

Y	X			
	-3	-1	1	3
0	0,02	0,03	0,05	0,07
1	0,06	0,07	0,10	0,10
2	0,07	0,08	0,15	0,20

$$D = \{x^2 + y \leq 1\}$$

2.20

Y	X			
	-2	0	2	4
-1	0,03	0,04	0,06	0,08
0	0,05	0,06	0,09	0,10
2	0,06	0,08	0,15	0,20

$$D = \{-1 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 2\}$$

2.21

Y	X			
	-1	0	1	3
0	0,03	0,10	0,08	0,06
1	0,06	0,09	0,10	0,07
2	0,06	0,09	0,20	0,06

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$$

2.22

Y	X			
	-1	0	1	2
-1	0,03	0,08	0,20	0,05
1	0,05	0,09	0,10	0,09
3	0,05	0,07	0,10	0,09

$$D = \{x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$

2.23

Y	X			
	-1	0	1	2
-1	0,03	0,03	0,06	0,05
0	0,02	0,10	0,10	0,08
3	0,06	0,07	0,20	0,20

$$D = \{-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq 2\}$$

2.24

Y	X			
	-2	-1	0	1
0	0,03	0,04	0,07	0,08
2	0,02	0,07	0,08	0,10
3	0,06	0,10	0,15	0,20

$$D = \{(x + 1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

2.25

Y	X			
	-1	1	2	4
-1	0,03	0,02	0,15	0,05
2	0,03	0,10	0,09	0,20
3	0,03	0,07	0,20	0,03

$$D = \{0 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 2\}$$

2.26

Y	X			
	-3	-1	0	1
2	0,05	0,03	0,06	0,05
3	0,06	0,07	0,20	0,05
4	0,09	0,10	0,09	0,15

$$D = \{-3 \leq x \leq 0; 2 \leq y \leq 3\}$$

2.27

Y	X			
	-4	-2	0	2
-2	0,02	0,04	0,04	0,03
-1	0,07	0,05	0,20	0,06
1	0,04	0,10	0,15	0,20

$$D = \{-2 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2\}$$

2.28

Y	X			
	-1	1	3	4
-1	0,05	0,04	0,20	0,05
1	0,10	0,08	0,10	0,06
2	0,02	0,05	0,15	0,10

$$D = \{-1 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2\}$$

2.29

Y	X			
	-2	-1	1	2
-1	0,03	0,04	0,06	0,08
0	0,06	0,07	0,10	0,10
3	0,05	0,07	0,14	0,20

$$D = \{(x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

2.30

Y	X			
	-3	-1	0	1
-2	0,03	0,06	0,10	0,08
-1	0,05	0,09	0,15	0,10
0	0,06	0,07	0,12	0,09

$$D = \{-4 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1\}$$

Zadanie 3

Dana jest gęstość $f(x, y)$. Oblicz A i współczynnik korelacji ρ . Czy X, Y są skorelowane?

Nr wariantu	$f(x, y)$	Obszar D
1	$f(x, y) = \begin{cases} A(2x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq 2,$ $0 \leq y \leq 2$
2	$f(x, y) = \begin{cases} A \cos(2x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4},$ $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$
3	$f(x, y) = \begin{cases} A(x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq 3,$ $0 \leq y \leq 3$
4	$f(x, y) = \begin{cases} A(x + y)e^{-x-y} & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x < \infty,$ $0 \leq y < \infty$
5	$f(x, y) = \begin{cases} Axy & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$y \leq 1 - x,$ $x \geq 0, y \geq 0$
6	$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$ $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
7	$f(x, y) = \begin{cases} A(x + 3y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq 3,$ $0 \leq y \leq 3$

8	$f(x, y) = \begin{cases} A(x + 2y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq 2,$ $0 \leq y \leq 2$
9	$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0,$ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$
10	$f(x, y) = \begin{cases} Axy & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x + y - 2 \leq 0,$ $x \geq 1, y \geq 0$
11	$f(x, y) = \begin{cases} A(x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$2x + y - 2 \leq 0,$ $x \geq 0, y \geq 0$
12	$f(x, y) = \begin{cases} A(x^2 + y^2) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 4,$ $x \geq 0, y \geq 0$
13	$f(x, y) = \begin{cases} A(3x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq 3,$ $0 \leq y \leq 3$
14	$f(x, y) = \begin{cases} A(x + y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 9,$ $x \geq 0, y \geq 0$
15	$f(x, y) = \begin{cases} Axy & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$3x + 2y \leq 6,$ $x \geq 0, y \geq 0$

16	$f(x, y) = \begin{cases} A(x+y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$2x+3y \leq 6,$ $x \geq 0, y \geq 0$
17	$f(x, y) = \begin{cases} Axy & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 2,$ $x \geq 0, y \geq 0$
18	$f(x, y) = \begin{cases} A(x^2 + y^2) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 9,$ $x \geq 0, y \geq 0$
19	$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(2x+y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},$ $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
20	$f(x, y) = \begin{cases} A(x+y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 1,$ $x \geq 0, y \geq 0$
21	$f(x, y) = \begin{cases} Axy & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$2x+y-2 \leq 0,$ $x \geq 0, y \geq 0$
22	$f(x, y) = \begin{cases} Axy & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 16,$ $x \geq 0, y \geq 0$

23	$f(x, y) = \begin{cases} A \sin(x+2y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$ $0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$
24	$f(x, y) = \begin{cases} A(x+y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 16,$ $x \geq 0, y \geq 0$
25	$f(x, y) = \begin{cases} A(x+y) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$3x+2y \leq 6,$ $x \geq 0, y \geq 0$
26	$f(x, y) = \begin{cases} A(x^2 + y^2) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 5,$ $x \geq 0, y \geq 0$
27	$f(x, y) = \begin{cases} A(2x+y)e^{-2x-y} & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x < \infty,$ $0 \leq y < \infty$
28	$f(x, y) = \begin{cases} Axye^{-x^2-y^2} & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$0 \leq x < \infty,$ $0 \leq y < \infty$
29	$f(x, y) = \begin{cases} A(x^2 + y^2) & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq 4$
30	$f(x, y) = \begin{cases} A^2 - x^2 + y^2 & (x, y) \in D; \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$	$x^2 + y^2 \leq A^2,$ $(A > 0)$

L.K. 05.10.2017